

Desarrollo de estrategias cognitivas en cálculo y estimación numérica

Facultad Ciencias de la Educación

Máster Intervención Psicológica en Contextos de Riesgo

Departamento de Psicología

Coordinador TFM: Manuel Aguilar Villagrán

Alumna: Milagrosa Domínguez Suraña

Año: 2012/13

Índice

Introducción	3
Método	12
Participantes	12
Materiales	12
Procedimiento	13
Resultados y discusión	14
Conclusiones	22
Referencias bibliográficas	25

Desarrollo de estrategias cognitivas en cálculo y estimación numérica

Milagrosa Domínguez Suraña

Universidad de Cádiz

En este estudio se pretende conocer el rendimiento de los alumnos de 4º y 5º de Educación Primaria de la provincia de Cádiz en cálculo mental, cálculo escrito y estimación numérica observando la relación existente entre el cálculo y la estimación en la recta numérica, estableciendo diferencias entre ambos grupos. Se hará a través de tres pruebas: dos pruebas colectivas, una de cálculo mental y otra de cálculo escrito, donde se presentarán veinte ítems que los alumnos tendrán que contestar y, una tercera prueba individual, de estimación, donde los alumnos tendrán que señalar en una línea numérica, que va de 0 a 1000, veintidós números que se les da de forma aleatoria. Obteniendo diferencias significativas entre los grupos estudiados y existiendo una relación visible entre el cálculo y la estimación en la línea numérica.

Palabras claves: cálculo mental, cálculo escrito, estimación, línea numérica

Introducción

Las matemáticas juegan un papel primordial en nuestras vidas, en nuestra sociedad. El día a día está marcado por elementos matemáticos (números, formas, operaciones, lógica...) por lo que es muy necesaria para comprender y analizar toda la información que nos llega y nos rodea.

Es muy importante que los docentes, en las aulas de las escuelas, estimulen a los alumnos para que crezca en ellos gran motivación e ilusión por aprender cosas nuevas, respeto, educación, responsabilidad. Para poder llegar a formar personas reflexivas, autónomas, críticas.

Los alumnos deben adquirir las destrezas en el cálculo haciéndolo exacto y rápido. Cuando hablamos de cálculo, se nos viene a la cabeza infinidad de términos relacionados (operaciones, relaciones, algoritmos, resolver, dígitos, lógica, etc.) por lo que debemos tener en cuenta que, el cálculo, es una actividad cognitiva que realizamos para relacionar cosas. Esta es una actividad que está presente en nuestra cultura desde hace siglos, ya que los seres humanos hemos tenido la necesidad de hacer cálculos con todo lo que encontrábamos a nuestro alrededor.

El dominio de las matemáticas y de los algoritmos, como nos dice Jacuvobich (2006) siempre ha generado gran interés entre la población, pero ha pasado a un segundo plano. Es verdad que existen personas que, aún sin tener conocimiento sobre esto, es decir, sin tener dominio de los algoritmos, utilizan algún tipo de estrategia en su vida diaria sin que nadie se lo haya enseñado para poder desenvolverse en su día a día.

La vida está llena de algoritmos, en la compra, en las recetas, etc. Fernández Bravo (2005) comenta que sin razonar de forma lógica no es posible crear algoritmos, nuestra mente acepta lo que estamos haciendo sin entender por qué lo hacemos, sin embargo, es fundamental que sepamos aplicarlo a través de la elección de una buena estrategia, de una decisión propia, que nos ahorre tiempo y nos haga entender lo que hacemos y su posterior aplicación. Es por ello que, en el ámbito de las matemáticas, no es tan importante la aplicación reiterada de movimientos u operaciones sino la cantidad de ideas que relacionamos para su posterior resolución.

Como se puede apreciar en la orden del Ministerio de Educación, en la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria (MEC, 2007), se contempla la competencia matemática, que consiste en “la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático” y el desarrollo e implementación de diferentes estrategias de cálculo, tanto escrito como pensado, a través de situaciones de resolución de problemas. Por lo que, conocer y aprender son dos conceptos que llevamos adheridos a nosotros y tiene una estrecha relación con las experiencias que vivimos en nuestro día a día.

Según Rodríguez (2010), los docentes, en el ámbito de las matemáticas, deben ser capaces de proporcionar a los alumnos numerosos instrumentos intelectuales como estrategias y métodos para el desarrollo integral de estos, para que sean capaces de llevarlos a situaciones puntuales, a su realidad o vida cotidiana.

Una de las herramientas más importantes dentro de las matemáticas es el cálculo mental, ya que a través de esta se pueden adquirir distintas destrezas. Podemos verlo como una habilidad que nos permite desarrollar el conocimiento y nos facilita la resolución de distintos problemas que suceden a nuestro alrededor.

Gómez Alfonso (2005) señala que en el cálculo mental se trabaja con datos exactos que son el resultado de un juicio y está caracterizado por el uso de distintos métodos de cálculo alternativos a los que estamos acostumbrados a ver, como la disposición de los dígitos en columnas y filas y, además, requiere adiestramiento. El cálculo mental es una forma de calcular pero que no requiere ayuda externa ya que solo trabaja la mente. Por otro lado, en el cálculo estimado no se trabaja con datos exactos y estos son el resultado de un juicio o valoración. Y, por último, en el cálculo aproximado tampoco se trabaja con datos exactos pero estos proceden de la medición con instrumentos de medida. Este tipo facilita el cálculo aunque pierde precisión. Se reformulan los datos con unas técnicas determinadas.

Existen dos modalidades de cálculo mental, el cálculo mecánico o de estímulo-respuesta y el cálculo reflexivo o pensado. En el primero, se emplean técnicas automáticas, mientras que en el segundo, se utilizan estrategias que requieren reflexionar y tomar decisiones.

Threlfall (2002) nos señala la importancia de la enseñanza del cálculo mental en las escuelas a través de los siguientes argumentos: a) La mayoría de los cálculos que se realizan en la vida son mentales. b) El trabajo mental desarrolla el conocimiento dentro del sistema numérico. c) El trabajo mental desarrolla habilidades para resolver problemas. d) El trabajo mental proporciona éxito en posterior cálculo escrito.

Es cierto que no se le ha dado, ni se le da, mucha importancia al aprendizaje y desarrollo del cálculo mental, ya sea porque los docentes no lo consideran importante o porque no saben cómo trabajarlo en clase. Hace unos años ni si quiera aparecía en los libros de texto como tal, hoy en día podemos ver que en la mayoría de ellos aparece en cada tema un apartado para la enseñanza del cálculo mental a través de distintas estrategias.

Leger et al. (2011) establecen que el cálculo mental de hoy día presenta un rol cognitivo y otro didáctico más relevante que el rol que se utilizaba hace años. Es decir, el cálculo mental, su aprendizaje, aparece como algo secundario a la comprensión y relación de los números y la familiaridad del alumnado con los distintos ámbitos de estos y sus operaciones. Esto es manifiesto en los estudiantes a través de las estrategias que utilizan a la hora de resolver una tarea de cálculo mental. Pero, si prestamos atención especial a estas estrategias, se aprecia la ausencia de presentaciones concretas.

Esto puede deberse a los docentes, la forma en la que enseñan un procedimiento estándar único para un tipo de operación donde se van siguiendo paso a paso las pautas para resolverlo. Esto ocurre cuando se enseña a través de ejemplos en clase, utilizando un tipo de estrategia, por ejemplo, la línea numérica, muchas veces se queda en ejemplo sin generalizar a otras situaciones, en lugar de hacerlas conocimiento en sí de tal forma que incida en el proceso cognitivo del alumnado, ayudándoles así a la construcción del conocimiento.

El problema existente en la educación matemática según Godino, Font y Wilhelmi, (2006) radica en la falta de un conocimiento compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores.

También es cierto, que se intentan enseñar medidas eficaces para realizar cálculo en nuestro día a día sin utilizar instrumentos o medios destinados a ello. Los docentes enseñan un procedimiento para cada operación, es decir, que se siga los pasos precisos para resolver un problema. Aunque el uso de la calculadora está generalizado, es necesario conocer estrategias de cálculo. Es fundamental que todos sepamos calcular mentalmente y por escrito con facilidad y seguridad. El valor educativo de ejercicios de cálculo mental está en la forma de llevarlo a cabo y no tanto en su rapidez. Debe estar centrado más en el análisis de las distintas situaciones numéricas, la comprensión de los conceptos y su posterior adquisición (Gómez Alfonso, 2005).

Como hemos podido apreciar con el transcurso del tiempo, a medida que la tecnología se ha ido introduciendo de forma paulatina en nuestras vidas, el cálculo mental ha ido perdiendo importancia, tal y como hemos dicho anteriormente, debido al uso de las calculadoras, los ordenadores o los móviles. Pero, a pesar de esto, nos hemos ido dando cuenta de la gran importancia que tiene esta actividad cognitiva para nosotros en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de las matemáticas.

Partimos de la idea de que el cálculo mental es rápido y eficaz, mientras que el método tradicional de los algoritmos de lápiz y papel es como un pequeño problema en la enseñanza de las matemáticas, debido a que, no ayuda a los alumnos a realizar conexiones con experiencias ni generalizaciones. Es más, con la enseñanza de los métodos tradicionales y la no fomentación del cálculo mental tendemos a “bloquear” la mente de nuestros alumnos, haciéndoles más complicada la tarea de búsqueda de estrategias alternativas para la resolución de problemas.

Los algoritmos verticales se suelen escribir en el papel de manera natural siguiendo siempre una misma regla pero, si esas operaciones las hacemos mentalmente, no solo visualizamos el algoritmo escrito, sino que, nos van surgiendo estrategias que vamos generalizando a otras situaciones como agrupar, añadir, quitar, redondear, etc. De este modo Gálvez et al. (2011) plantean que en las escuelas no se fomente a los niños para que actúen de forma mecánica con algoritmos memorizados sino que el alumno recurra a una visualización del algoritmo que, a su vez, está ligada a una activación de distintas estrategias que, eso sí, dependen de su experiencia e interacción con el mundo.

Beishuizen (1997) establece una diferencia entre hacer cálculos mentales *en* la cabeza y hacerlos *con* la cabeza. Cuando hablamos de realizar este tipo de cálculo en la cabeza, nos estamos refiriendo a la memorización de distintos factores numéricos que se realizan en la cabeza, mientras que el segundo enunciado hace referencia a las estrategias mentales que se realizan con la cabeza. De esta manera, el sistema numérico se desarrolla de forma más efectiva cuando se piensan los números como un todo ya que así se hace un mejor uso de las distintas técnicas, como pueden ser las de estimación o aproximación.

Martínez (2011) nos habla de la aplicación de distintos algoritmos a lo largo de la historia que, en la actualidad, se ven reducidos al uso del cálculo mental y al uso de las diferentes destrezas de estimación que ayudan a la resolución de problemas desde edades tempranas. El algoritmo ABN es un método que puede ser utilizado por todos los alumnos ya que es flexible y se adapta al ritmo de cada estudiante para llegar a alcanzar una buena competencia matemática a través del manejo o experiencia directa, el alumno se hace constructor de su propio proceso de enseñanza-aprendizaje. En este método se siguen los pasos y procesos que constituyen cada operación utilizando números completos sin hacer divisiones que hagan trabajar a los alumnos con cifras sin sentido.

Por ello, vemos necesario un método que fomente la elección de distintas alternativas presentando de forma coherente los procedimientos y las distintas opciones posibles para que puedan llevarse a cabo de forma organizada y sistémica. Los docentes deben tener un sistema de clasificación de estrategias que tengan cierto sentido (Threlfall, 2002)

Tabla 1. Estrategias de cálculo mental por Hartnett (2007), Heirdsfield (2005); Tabor (2008), Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere, Verschaffel (2009) y Torbeyns, De Smedt, Stassens, Ghesquiere, Verschaffel (2009).

Estrategias	Descripción
Reconocimiento conjunto con dibujos	Identificar conjunto de números
Relación Parte-Todo	Reconocer las partes del todo. Los números se descomponen en partes
Contar hacia adelante y hacia atrás	Contar hacia adelante y hacia atrás a partir de un número dado
Siguiente número	Establecer de inmediato el número que viene después del número dado
Visualización de números en una franja	Visualizar en la representación los números y responder a preguntas
Relación uno más/menos, dos más/menos	Responder el número que es una o dos veces mayor que el número dado
Sumas del uno al diez	
Dobles	Dobles creados como imágenes visuales
Más uno	Decir el siguiente número
Más dos	Omitir un número y decir el siguiente
Más tres	Omitir dos números y decir el siguiente
En restas del uno al diez	
Pensar en suma	Para $9 - 3$ pensar ¿Cuánto le tengo que sumar a tres para que me de nueve?
Visualización	Visualizar el minuendo y quitar el sustraendo
Contar hacia atrás	Para operaciones de -1 , -2 , -3
Sumar diez a un número	Para números de 11 a 20
Sumas	
Dobles cercanos	Doble del número más pequeño y suma uno
Dos aparte	Doble del número que está en medio
Más cero	No cambia
Hacer diez	Para operaciones con ocho o nueve en el sumando
Resta	
A través de diez	$13 - 8$ (de 8 a 10 van 2 y 3 más son 5)
Hacia abajo a través de diez	$14 - 6$ ($14 - 4 = 10$ y 2 menos me da 8)
Sumas para las decenas	$3 + 5 =$ doble de 4
Encontrando compatibles	Buscar pares de números que sumen diez
Compensación	Uno o ambos números son combinados para hacer la suma más fácil y la respuesta se ajusta para compensar el cambio
Multiplicación	

Por dos	Como dobles
Cincos	Patrones de cinco en cinco
Unos	Se queda igual
Truco del cero	Se aparta el cero, se multiplica y se vuelve a añadir el cero
Cuatro	Dos dobles
Tres	Doble más un conjunto
Hacer decenas, centenas...	$48 + 36$ es igual que $50 + 34$
Divisiones	
Pensar en multiplicar	$36 / 6$ pensar en ¿cuántas veces tengo que multiplicar seis para que me de 36?
Equilibrar una diferencia constante	Implica sumar en ambos números la misma cantidad para que la diferencia sea la misma
Propiedad distributiva	Implica dejar el número mayor redondeado y multiplicarlo por el otro dígito. Luego multiplicamos el número que hemos quitado
Reducir a la mitad y doblar	Un factor se reduce a la mitad y el siguiente se dobla $500 \times 88 = 1000 \times 44$
Dividir entre decenas, centenas	Dividir los números sin ceros, una vez dividido añadimos los ceros

En el cálculo, observamos cómo se ordenan diferentes cifras que luego se combinan entre sí a través de diferentes cálculos o algoritmos básicos que dan lugar a nuevas cifras o nos ayudan a la resolución de problemas. Jocuvobich (2006) nos indica que para llegar a la resolución de dichos problemas es necesaria una adecuada función ejecutiva, diferentes tipos de recursos (atención, estrategias, etc.) y la conservación de la memoria de trabajo.

Estas y otras estrategias son muy útiles para la realización de operaciones matemáticas, cálculo mental, estimación...

Según Campbell (2005) la estimación es una parte importante del conocimiento matemático ya que está presente en la escuela y en nuestras vidas. Se sabe que también está relacionada con otros aspectos específicos de la capacidad matemática como las habilidades aritméticas o los resultados de pruebas de rendimiento.

La estimación es un proceso de traslado entre representaciones cuantitativas alternativas. Estas pueden ser de dos clases: numéricas o no numéricas. La estimación numérica corresponde al subconjunto de tareas de estimación en el que uno o ambos lados implican números, se incluyen la mayoría de las formas prototípicas de estimación. Mientras que la estimación no numérica implica tareas en la que la representación cuantitativa es numérica. Esta categoría incluye tareas utilizadas en experimentos psicofísicos que requieren dos representaciones cuantitativas no numéricas. Algunas estimaciones implican traslado de representaciones no numéricas a otras no numéricas (trasladar el brillo percibido a líneas longitudinales), otras van de estimaciones numéricas a no numéricas (presentarle a los niños un número y preguntarles por la posición de éste en la línea numérica).

La estimación es un proceso que la mayoría de los niños y, también adultos, encuentran difícil (estimar la distancia de un lugar a otro, cuántas personas hay en una ciudad, cuánto tiempo tardaré en llegar a casa, cuánto dinero me sobrá después de hacer la compra...) sin esta capacidad de estimar con precisión el día a día en nuestras vidas sería más difícil. Pero con la edad y la experiencia vamos progresando en muchas tareas de estimación (Siegler y Booth, 2004; Booth y Siegler, 2008; Opfer y Siegler, 2007).

Con este proceso se pretende la aproximación a un valor cuantitativo, que utiliza números y que no requiere un conocimiento real de las propiedades que se estiman o de la unidad de medida convencional. Esto es fundamental para la estimación ya que elimina el conocimiento no matemático y determinadas unidades de medida. Y, como en una tarea de estimación numérica, se puede ver el cambio en el desarrollo de la comprensión de las magnitudes numéricas que influyen en la estimación numérica (Campbell, 2005).

Según el trabajo de Siegler y Booth (2004), existen cambios en el desarrollo de los niños en la representación en la línea numérica de 0 a 100 entre los prescolares y los alumnos de segundo grado. Al igual que entre los alumnos de segundo y sexto grado en la estimación en la línea numérica de 0 a 1000 (Siegler y Opfer, 2003). De esta forma, cuando preguntamos por la localización de una estimación en la línea numérica de 0 a 100, sin presentar ninguna marca entre ambos dígitos, los prescolares, presentan en su análisis una función logarítmica y, la mayoría de los alumnos de segundo una función

lineal. Sin embargo, la mitad de los alumnos de primer grado presentan una distribución logarítmica y, la otra mitad, lineal (Siegler y Booth, 2004). Algo parecido les ocurre a los alumnos de segundo y sexto con la línea numérica de 0 a 1000, los primeros presentan una función logarítmica, mientras que los de segundo lineal. Booth y Siegler (2006) encontraron en su estudio que los alumnos desde segundo hasta cuarto grado van aumentando su estimación en la línea numérica pasando de una función logarítmica a una lineal. Probablemente esto ocurra debido a que los niños presentan una mayor familiaridad con los números (Dehaene, 1997).

Como se ha podido observar, a medida que los alumnos se van familiarizando con los números en el transcurso de los cursos, su representación va siendo más exacta, es decir, su representación pasa de ser logarítmica en los cursos más bajos a una lineal en la línea numérica que va de 0, en uno de los extremos, a 1000, en el otro.

En el presente trabajo nos propusimos varios objetivos: 1) evaluar el desarrollo de estrategias de cálculo aritmético escrito y mental en una muestra de alumnos de Educación Primaria, 2) comprobar si existen diferencias entre el cálculo escrito y mental en los diferentes cursos, 3) estimar las dificultades de las operaciones aritméticas en relación al curso de escolarización, 4) evaluar la capacidad de estimación numérica entre 0 y 1000 en una muestra de Educación Primaria, 5) comprobar si existen relaciones entre el rendimiento de cálculo escrito y mental y la estimación de magnitudes numéricas en la línea numérica de 0 a 1000 y, 6) comprobar que tipo de distribución (logarítmica o lineal) presentan los alumnos en la estimación de la línea numérica.

Por lo que los alumnos de los cursos más avanzados desarrollarán estrategias de cálculo escrito y mental más eficaces que los alumnos de curso inferior, no habrá diferencias de rendimiento entre el cálculo escrito y cálculo mental en los alumnos evaluados, no habrá diferencias en el desarrollo de estrategias de cálculo mental entre los participantes de Educación Primaria, no habrá diferencias entre los participantes en las tareas de estimación numérica, no habrá relación entre la capacidad de estimación numérica y cálculo escrito y mental y, por último, los alumnos de cuarto presentarán una distribución logarítmica mientras que en los de quinto será lineal.

Para ello se seleccionó una muestra de alumnos que cursan cuarto y quinto de Educación Primaria en el ámbito de las matemáticas, especialmente en cálculo escrito,

cálculo mental y estimación numérica. En las pruebas de cálculo escrito y cálculo mental se les propuso veinte operaciones aritméticas de forma escrita, y tras un intervalo de tiempo, se les volvieron a presentar las mismas operaciones pero de forma mental. Una vez realizadas dichas pruebas se les pasó las pruebas de estimación compuestas de veintidós ítems (véase más adelante).

Método

Participantes:

En este estudio han participado una muestra no probabilística de 165 estudiantes, de estos, 91 alumnos pertenecen a cuarto curso de Educación Primaria (edad media=9,98 años, desviación típica=0,38) y 74 alumnos pertenecientes a quinto curso de Educación Primaria (edad media=10,5 años, desviación típica=0,32). Entre ambos grupos nos encontramos con 86 chicos (52,12%) y 79 chicas (47,88%) pertenecientes a dos centros de la provincia de Cádiz, 58 alumnos del colegio La Constitución (35,15%) y 107 del colegio Compañía de María (68,85%). Ambos centros escolarizan alumnos de procedencia socioeconómica media. Los alumnos participaron de forma voluntaria en el estudio.

Materiales:

En este estudio hemos usado tres pruebas. La primera de ellas, la de cálculo mental (Ineson, 2007), está compuesta por 20 ítems de operaciones aritméticas (4 operaciones de suma, 6 operaciones de resta, 6 operaciones de multiplicación y 4 operaciones de división). Los ítems fueron elegidos debido a que su solución sería complicada utilizando un algoritmo escrito estándar, pero relativamente fácil si se utiliza un método o estrategia de cálculo mental como el redondeo y el ajuste, operaciones con números cercanos a 100, multiplicaciones con múltiplos de 10, reducciones a la mitad en las divisiones, etc. La segunda prueba, la de cálculo escrito, se pasó tras un intervalo de dos semanas, y está constituido por las mismas operaciones de la prueba anterior. En la hoja de respuesta de esta prueba se le proporcionaba espacio suficiente para la realización del cálculo con algoritmos escritos (en la tabla 2 se detallan las operaciones).

Tabla 2. Operaciones cálculo mental y escrito (Ineson, 2007)

Operaciones			
Sumas	Restas	Multiplicaciones	Divisiones
$99 + 54$	$100 - 25$	30×5	$100 : 2$
$101 + 54$	$133 - 36$	99×2	$102 : 2$
$49 + 51$	$90 - 25$	30×70	$500 : 2$
$190 + 45$	$1000 - 99$	29×3	$500 : 50$
	$10000 - 101$	2001×4	
	$1000 - 89$	599×2	

En la última prueba, la estimación en la línea numérica (Opfer y Siegler, 2007), se le presenta a los alumnos cada tarea en una línea numérica de 25 cm, en el extremo izquierdo aparece el número 0 mientras que en el extremo derecho aparece el 1000. Los números a estimar son: 2, 5, 18, 34, 56, 78, 100, 122, 147, 150, 163, 179, 246, 366, 486, 606, 722, 725, 738, 754, 818 y 938 que aparecen a una distancia de dos cm por encima de la línea numérica en el centro de la misma. Estos números han sido seleccionados para maximizar la distinción de la función logarítmica y lineal, minimizar la influencia de algún conocimiento específico (como que 500 es la mitad entre 0 y 1000) y predecir las diferencias en estimación en los dos grupos.

Procedimiento:

A los participantes se les administraron las dos primeras pruebas de forma colectiva. En la prueba de cálculo mental, aparecían todos los espacios para escribir las respuestas en una misma página. Se iba leyendo en voz alta cada ítem dos veces (por ejemplo, noventa y nueve más cincuenta y cuatro; repetimos, a noventa y nueve le sumamos cincuenta y cuatro) de esta manera minimizábamos el error en los alumnos. Tras cada ítem se les dejaba diez segundos a los alumnos de cuarto, y siete segundos, a los de quinto como intervalo de un ítem a otro. Aquí no se les permitió utilizar algoritmos escritos en ninguna de las operaciones. La prueba de cálculo escrito se les administró pasadas dos semanas de la prueba anterior. Los ítems presentaban un espacio suficiente para que los alumnos lo usaran si querían realizar los algoritmos pertinentes. No se hizo énfasis en si tenían el deber de utilizar ese espacio o no. El orden de

presentación de las operaciones fue aleatorio tanto en la versión escrita como en la prueba mental.

La última prueba, la de estimación numérica, se pasó de forma individual. Los ítems se les presentaban de manera desordenada, uno por página, para que no tuvieran la posibilidad de ver cuál sería el siguiente ítem. Al comienzo de la prueba se le decía: “Hoy vamos a jugar a un juego con la línea numérica. Te voy a decir que me enseñes en la línea numérica dónde van una serie de números. Tú decides dónde van situados esos números, solo quiero que traces una línea en la recta numérica como esta (hacemos una línea)” después de cada ítem le decimos “Esta línea numérica va desde el 0, en el principio, hasta el 1000, en el final. Si el 0 está aquí y el 1000 está aquí, ¿dónde pondrías el N ?”

Resultados y discusión

Resultados pruebas de cálculo escrito y cálculo mental. Los resultados de las pruebas mental y escrita fueron computados concediendo un punto por operación correctamente resuelta y cero en el caso de una solución incorrecta. Además, en las hojas de respuesta se analizaba si el alumno utilizaba algoritmo escrito o realizaba la operación mentalmente.

En la tabla 3 se muestra la media y la desviación típica hallada en cálculo escrito, cálculo mental y cálculo escrito realizado mentalmente. Como se puede observar y, como era de esperar, en el cálculo escrito apenas existen diferencias, sin embargo, en el cálculo mental y calculo escrito realizado mentalmente, los alumnos de cuarto curso presentan una media inferior a los de quinto curso, esta diferencia es aún más señalada en aquellas operaciones de cálculo escrito efectuadas mentalmente. Las tareas de cálculo escrito presentan menor dificultad para ambos cursos que las realizadas con cálculo mental (véase tabla 4).

Tabla 3. Media y Desviación típica en cálculo mental, cálculo escrito y cálculo escrito realizado mentalmente

	4º		5º	
	Media	Desviación Típ.	Media	Desviación Típ.
Cálculo escrito	17,34	2,96	17,84	1,60
Cálculo mental	12,26	4,61	14,65	3,96
Cálculo escrito mentalmente	5,86	7,42	12,61	7,02

La tabla 4 muestra los porcentajes de aciertos obtenidos en cada una de las operaciones aritméticas propuestas y el número de alumnos que han superado cada ítem. Como vemos en la tabla, las operaciones (2001×4) para cuarto curso y (30×5) para quinto curso con un porcentaje de 98,8% y 100% respectivamente, son las que mejor puntuaciones han obtenido. Mientras que la operación $(10000 - 101)$ es la que mayor dificultad ha presentado para ambos cursos con un porcentaje del 54,9% y 58,1% para cuarto y quinto curso respectivamente.

También podemos ver los porcentajes de aciertos en las distintas operaciones aritméticas que se les han presentado a los alumnos. Si la analizamos podemos observar la dificultad que encuentran los alumnos en cada tarea, aun teniendo en cuenta que estas operaciones son fáciles para alumnos de cuarto y quinto de primaria. La operación que, por excelencia, ha resultado más complicada en cualquiera de las formas presentadas, ha sido $(10000 - 101)$ obteniendo los siguientes porcentajes para cuarto curso de cálculo escrito, cálculo mental y cálculo escrito resultado a través de estrategias de cálculo mental (54,9; 13,2 y 6,6 respectivamente). Sin embargo, como era de esperar, en quinto curso, los resultados son un poco mejores pero siguen siendo los de menor valor (58,1%; 39,2% y 29,7% respectivamente).

Comparando dichos resultados, se ve como el cálculo escrito presenta mejores resultados que las mismas operaciones presentadas en cálculo mental. Esto se debe a que el alumnado aún es dependiente de su realización sobre el papel a través de logaritmos escritos verticalmente. A estas edades los alumnos deberían tener adquiridas estrategias de cálculo mental como el redondeo, doblar y reducir a la mitad, el ajuste...

En relación a las operaciones realizadas en las tareas de sumas se aprecia que la mayoría realiza bien estos cálculos. Si nos centramos en las restas observamos que las que presentan mayor dificultad es la operación citada anteriormente, esto quiere decir que los alumnos intentan seguir, ya sea, en papel o en su cabeza, el algoritmo vertical tradicional. En las multiplicaciones, se obtienen buenos resultados, a excepción de la operación (30×70) que los alumnos olvidan multiplicar por uno de los ceros, ya que las soluciones que se aprecian en la hoja de respuestas son 210 y no 2100. Por último, en las tareas de división, los alumnos parecen no tener tanta dificultad pero sí que se aprecia como utilizan estrategias como la de doblar y reducir a la mitad y como son capaces de transferirla a distintas situaciones.

Si analizamos estos resultados por operaciones observamos que dentro del apartado de las sumas hay varios ítems que fomentan las estrategias de estimación y aproximación. Los resultados obtenidos en estas operaciones fueron altos en ambos cursos a excepción de la operación $(190 + 45)$ que presenta un porcentaje de aciertos más bajo que el resto de operaciones de este grupo. Tal y como era de esperar tras ver los resultados obtenidos en las pruebas realizadas en el artículo realizado por Ineson (2007). Se observa que los alumnos se sienten más confiados al realizar las operaciones de forma escrita, el porcentaje baja cuando estas mismas operaciones se realizan mentalmente. Aquí el porcentaje es algo mayor en quinto curso.

Centrándonos en las operaciones de sustracción apreciamos que todas usan números cercanos a un múltiplo de 10. Por lo general, tanto en la parte escrita como en la mental, se observan altos porcentajes a excepción de la operación $(10000-101)$ como mencionamos anteriormente. Los alumnos tienen adquiridas ciertas estrategias que no son capaces de generalizar a situaciones semejantes por lo que el procedimiento a seguir es la realización de algoritmos verticales dificultando su resolución en vez de utilizar estrategias que simplifiquen el trabajo (a 10000 le restamos 100 y luego volvemos a restar uno).

En las multiplicaciones vemos altos porcentajes de aciertos en cuarto y quinto curso, pero nos llama la atención como dos ítems (30×5) y (30×70) que son tan semejantes pueden presentar tanta diferencia en el porcentaje de aciertos ya sea de forma escrita o mentalmente, que en este último se acentúan más aún. Para estos alumnos la operación 30×5 es mucho más sencilla de realizar que 30×70 . Aquí se observa claramente que no son capaces de generalizar estrategias a otras situaciones tal y como nos comenta Ineson (2007).

Por último, en las divisiones, hay operaciones que requieren estrategias de duplicación y reducción a la mitad. Parece ser que para estos estudiantes no existe gran dificultad a la hora de resolverlos pero la operación $500:50$ presenta un porcentaje menor que el resto del grupo y presenta una diferencia acentuada cuando tienen que resolverlo mentalmente, en este caso, el porcentaje de aciertos baja considerablemente en ambos cursos.

Tabla 4. Porcentajes de aciertos en las operaciones aritméticas

		Operaciones					
		4º			5º		
		Escrito	Mental	Escrito mental	Escrito	Mental	Escrito Mental
Sumas	99+54	93,4	68,1	28,6	94,6	64,9	62,2
	101+54	92,3	81,3	38,5	97,3	95,9	79,7
	49+51	94,5	78	35,2	95,9	90,5	75,7
	190+45	89	52,7	29,7	93,2	71,6	66,2
Restas	100-25	90,1	68,1	31,9	93,2	83,8	70,3
	133-36	87,9	42,9	24,2	89,2	64,9	56,8
	90-25	89	68,1	34,1	87,8	81,1	64,9
	1000-99	63,7	49,5	23,1	70,3	59,5	45,9
	10000-101	54,9	13,2	6,6	58,1	39,2	29,7
	1000-89	73,6	37,4	29,8	86,5	51,4	48,6
Multipliación	30x5	96,7	96,7	38,5	100	91,9	77
	99x2	96,7	80,2	31,9	89,2	81,1	60,8
	30x70	82,4	54,9	23,1	87,8	73	55,4
	29x3	89	63,7	28,6	94,6	52,7	63,5
	2001x4	98,9	68,1	34,1	97,3	83,8	67,6
	599x2	95,6	57,1	27,5	89,2	60,8	58,1
Divisiones	100:2	90,1	81,3	39,6	97,3	94,6	78,4
	102:2	90,1	71,4	31,9	97,3	82,4	74,3
	500:2	84,6	45,1	29,7	90,5	74,3	71,6
	500:50	79,1	47,3	26,4	74,3	63,5	55,4

Resultados prueba de estimación. En la tercera prueba se computaban los ítems que cada alumno estimaba y su porcentaje de error obtenido a través de la siguiente operación:

$$\left| \frac{\text{Estimación} - \text{Cantidad estimada}}{\text{Escala de estimación}} \right|$$

Si a un alumno se le preguntaba por la localización del número 78, en la línea numérica de 0 a 1000, y el marcaba un punto correspondiente al número 89, el porcentaje de error es del 1,7%, $[(89-78)/1000] \times 100$.

Si analizamos la tabla 5 vemos como a los alumnos, ya sean de cuarto curso o de quinto, presentan mayor dificultad en la realización de la tarea de estimación. Lo que sí

es cierto que a medida que el número se va haciendo más grande, a medida que se va acercando al extremo donde aparece el 1000, los datos van siendo más exactos o menor es el error de estimación. La dificultad está en los dígitos que se encuentran cercanos al 0 o números menores a 500.

Tabla 5. Datos descriptivos de la prueba de estimación en la línea numérica

	Estimación							
	4º				5º			
Números estimados	Mínimo	Máximo	Media	Des.Típ.	Mínimo	Máximo	Media	Des.Típ.
2	5	500	71,13	66,22	6	122	42,74	28,69
5	10	512,5	127,66	85,97	12,5	309	96,82	67,05
18	18	800	209,39	121,52	15,5	431	158,14	94,1
34	34	507	239,62	110,96	31	512,5	195,8	105,12
56	62,5	804	278,01	127,43	37,5	600	231,49	132,84
78	87,5	596	281,05	114,71	56	681	239,62	127,46
100	75	800	305,33	114,01	69	552	263,72	112,52
122	81	818	314,31	121,54	90,5	639	279,66	119,72
147	100	806	299,98	119,33	65	550	267,6	103,62
150	78	821	296,77	109,75	87	510	260,36	90,76
163	100	779	281,12	110,98	90	591	254,62	97,66
179	95	672	294,32	104,43	87,5	560	273,26	100,32
246	162,5	794	332,42	104,45	144	633	326,53	97,81
366	212,5	725	343,74	76,46	231	625	342,72	74,51
486	292	737	423,81	65,07	347	550	431,43	43,02
606	410	735	594,79	42,09	380	847	587,61	69,98
722	116	854	664,38	86,80	498	852	672,14	79,96
725	81	850	665,44	90,16	444	857	679,76	87,1
738	490	878	676,28	72,45	462,5	881	682,49	85,62
754	87,5	875	666,03	91,89	495	840	671,2	79,21
818	510	935	721,08	82,79	515	925	735,8	88,5
938	497	962,5	795,2	99,39	162,5	968	820,78	117,75

Como comentan Siegler y Opfer (2003) en su trabajo, la función de la estimación de los estudiantes cambia a medida que van avanzando en edad empezando con una función logarítmica que poco a poco, a medida que van creciendo en edad u van adquiriendo conocimiento, destrezas y habilidades, se va convirtiendo, en una función lineal.

En este caso, como era de esperar y como muestran las Figuras 1 y 2, los alumnos de cuarto y quinto curso presentan una distribución lineal, lo que quiere decir que a la hora de estimar ciertas cantidades los alumnos son más precisos y, si estas cantidades son mayores, es decir, cercanas a 500 o más, la estimación será más exacta.

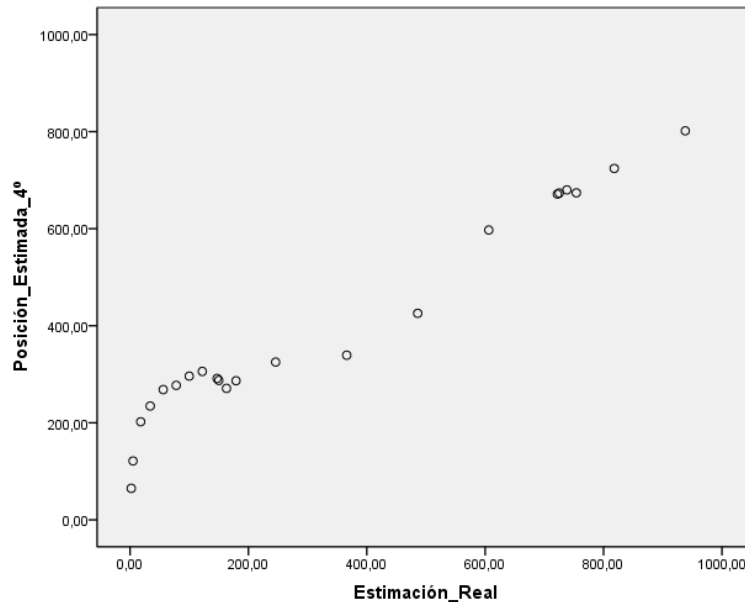


Figura 1. Función para la estimación en alumnos de cuarto de Educación Primaria

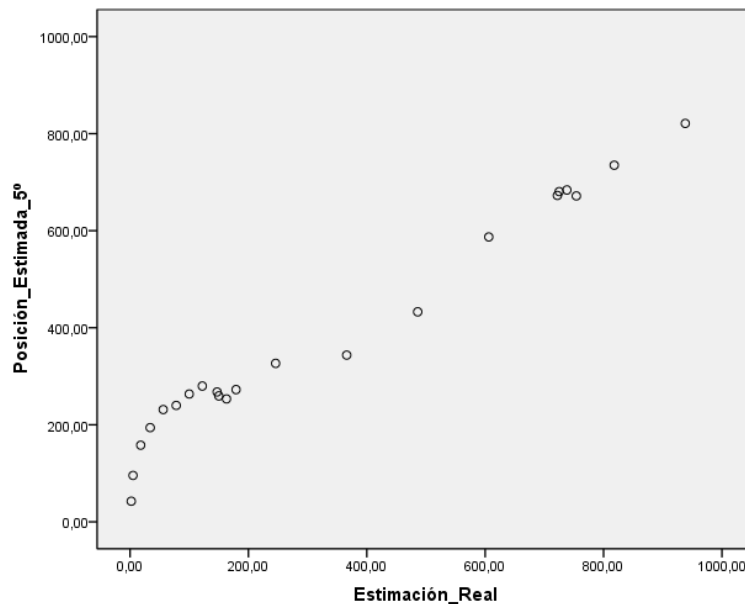


Figura 2. Función para la estimación en alumnos de quinto de Educación Primaria

Cada alumno evoluciona según sus experiencias vividas, va aprendiendo de todo aquello que sucede a su alrededor, pues lo mismo ocurre con la estimación en la línea numérica. Los alumnos de forma individual van aumentando su conocimiento y usándolo en todas las ocasiones que lo requieren haciendo uso de él y generalizando a otras situaciones cuando es necesario. En el caso de la estimación y su representación, como hemos dicho, va aumentando la exactitud en cada ítem ya que va creciendo la confianza en sí mismo.

La Tabla 6 muestra la correlación existente entre los distintos elementos estudiados en cuarto de Educación Primaria, como son la puntuación total de la prueba escrita, la puntuación total de la prueba mental, la puntuación total de la prueba escrita realizada mentalmente y el porcentaje de errores en estimación en la línea numérica. Como era de esperar, existe una correlación significativa positiva entre el cálculo mental y el cálculo escrito, a medida que obtenemos mayor puntuación en la prueba de cálculo escrito, mayor será la puntuación en el cálculo mental. Lo mismo ocurre con la prueba escrita realizada mentalmente, a medida que vamos obteniendo mejores resultados en la prueba mental, mejor puntuación sacaremos en la prueba escrita realizada mentalmente. Y, si nos centramos en el porcentaje de errores, apreciamos una correlación significativa negativa entre esta y la prueba de cálculo escrito y cálculo mental. Es lógico que a mayor puntuación en estas pruebas, el porcentaje de errores será menor.

Tabla 6. Correlación puntuación total de prueba escrita, prueba mental, prueba escrita realizada mentalmente y porcentaje de error de estimación en línea numérica en cuarto de Educación Primaria

	TOTESCRIT	TOTMENT	SCRIMENTOT	MEDIA_ERROR
TOTESCRIT	1	,514**	,080	-,300**
TOTMENT		1	,410**	-,488**
SCRIMENTOT			1	-,066
MEDIA_ERROR				1

****.** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Si seguimos con el análisis, en la Tabla 7 aparecen las correlaciones que existen en quinto de Educación Primaria entre la puntuación total de la prueba escrita, la puntuación total de la prueba mental, la puntuación total de la prueba escrita realizada mentalmente y el porcentaje de errores en estimación en la línea numérica. En este caso, la correlación existente entre la puntuación de cálculo escrito y mental es menor que en cuarto, sin embargo, la correlación entre la prueba de cálculo escrito realizado

mentalmente y la de cálculo mental es significativamente mayor que en curso inferior. Y, sigue siendo significativa la relación entre la prueba mental con el porcentaje medio de estimación, sin embargo, es poco significativa esta relación con la puntuación total de la prueba escrita realizada mentalmente.

Tabla 7. Correlación puntuación total de prueba escrita, prueba mental, prueba escrita realizada mentalmente y porcentaje de error de estimación en línea numérica en quinto de Educación Primaria

	TOTESCRIT	TOTMENT	SCRIMENTOT	MEDIA_ERROR
TOTESCRIT	1	,257*	,176	-,207
TOTMENT		1	,576**	-,458**
SCRIMENTOT			1	-,256*
MEDIA_ERROR				1

*. La correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral).

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

A través de este estudio hemos podido conocer las diferencias en el rendimiento entre el cálculo escrito y cálculo mental, pudiendo identificar a través de las pruebas realizadas las dificultades que presentan estos alumnos en las tareas, para así poder presentar propuestas de mejora en ejercicios de cálculo escrito y cálculo mental y para llevar a todos los ámbitos de nuestro día a día los conocimientos sobre las diferentes estrategias de cálculo mental. De esta manera puede dejarse a un lado la gran dependencia existente de realizar los cálculos de la forma tradicional, con algoritmos verticales tradicionales.

Como se ha podido comprobar existen diferencias entre ambos grupos, los alumnos de cuarto curso y los de quinto, esto probablemente se deba a la interiorización de las diferentes estrategias y su transferencia al resto de tareas. Por ello, debemos incidir en el aprendizaje de estos métodos para la resolución de problemas. Tal y como señalan Gómez Alfonso (1995) e Ineson (2008) un elemento primordial para que los alumnos adquieran dichas estrategias es la formación continua de los docentes.

Respecto a la estimación se puede decir que es una tarea que va en consonancia con el cálculo mental ya que se requieren de estrategias para realizar una buena estimación. Esta tarea va evolucionando con los años y la experiencia, tal y como comentamos anteriormente, las estrategias pueden ser aprendidas a través de alguien o pueden ser descubiertas por el propio sujeto. Es por ello que los docentes deben hacer hincapié en estas estrategias para desarrollar el conocimiento matemáticos de los

alumnos. Si en los libros de texto no aparecen apartados para trabajar esta parte de las matemáticas, será el docente junto con las familias los que se formarán para desarrollar en ellos este aspecto.

Como hemos visto, las matemáticas forman una parte fundamental en nuestras vidas por lo que debemos desarrollar en las escuelas y en casa el conocimiento matemático para que nuestros alumnos sepan desenvolverse de la mejor forma posible en diversas situaciones.

Conclusiones

Los alumnos evaluados pertenecen a los cursos de cuarto y quinto de Educación Primaria por lo que, en general, presentan un escaso repertorio de estrategias para el desarrollo de las operaciones. Esto puede ser observado directamente en los resultados de las pruebas realizadas, por un lado, en las pruebas de cálculo mental y cálculo escrito, vemos como las operaciones están divididas en cuatro grupos (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones). En el primer grupo, existen tres ítems que hacen referencia a estrategias de estimación y aproximación ya que se nos presentan dígitos cercanos a 100. En las operaciones de sustracción, aparecen números cercanos a múltiplos de 10, por lo que sería conveniente el uso de estrategias de reducción, ajuste, redondeo, etc. En los ítems del grupo de las multiplicaciones, aparecen operaciones que requieren, por ejemplo, el redondeo o el ajuste. Y, en las divisiones, aparecen también operaciones que para su resolución sería necesario el empleo de estrategias de duplicación y reducción a la mitad. A la vista de los resultados obtenidos, se puede decir que, los alumnos de quinto, presentan un porcentaje más alto en el uso de estrategias que los alumnos de cuarto curso, ya que el tipo de operaciones que presentan las pruebas de cálculo mental y cálculo escrito presentan poca dificultad si se realizan mentalmente a través de estrategias como las que hemos mencionado anteriormente, sin embargo, presentan mayor dificultad si se resuelven de forma tradicional a través de algoritmos verticales.

Los alumnos pertenecientes a nuestra muestra presentan diferencias entre cálculo mental y cálculo escrito obteniendo mayor puntuación las operaciones de cálculo escrito alcanzando el 80% y 90% de aciertos, mientras que las operaciones que se resolvieron mentalmente oscilan desde el 40% al 80%. Teniendo en cuenta que los alumnos que cursan quinto curso obtienen unos porcentajes algo más elevados que los de cuarto. Si

hacemos referencia a las operaciones de cálculo escrito que se han resuelto mentalmente, hemos de decir que, los porcentajes son inferiores y oscilan entre el 20% y el 40% en cuarto y de 45% a 70% en quinto, aproximadamente. Los alumnos se sienten más cómodos y seguros realizando los algoritmos de forma vertical con lápiz y papel.

Haciendo referencia a las operaciones aritméticas según el curso en el que se encuentre el alumnado, podemos decir que, para los alumnos de cuarto, las operaciones de multiplicación presentan menor dificultad. Dentro de este grupo, la operación de menor complicación es 2001×4 y, la más compleja, 30×70 . A continuación, le sigue las operaciones de adición donde el ítem $49 + 51$ manifiesta un mayor índice de aciertos mientras que la operación $190 + 45$, por el contrario, obtiene resultados más bajos. En tercer lugar, analizando las divisiones propuestas vemos que las operaciones $100:2$ y $102:2$ son las más sencillas de resolver, sin embargo, el ítem $500:50$ presenta mayor dificultad para su resolución. En último lugar, las sustracciones parecen ser las que mayor dificultad presentan para estos estudiantes obteniendo la operación $100 - 25$ mayor puntuación y, en el extremo contrario, la operación $10000 - 101$ la operación más compleja por excelencia.

Atendiendo a los alumnos que pertenecen a quinto curso de Educación Primaria encontramos resultados similares pero, en estos participantes, encontramos una diferencia, para ellos, las operaciones de adición requieren menor trabajo cognitivo, siendo éstas las operaciones más sencillas de resolver estando la operación $101 + 54$ en cabeza con la más alta de las puntuaciones dentro de este grupo, le sigue las multiplicaciones encontrando el ítem 30×5 como el más sencillo de resolver, ya que todos los alumnos lo han resuelto sin equivocación alguna pero, en este caso, al igual que los alumnos pertenecientes a cuarto, 30×70 ha sido la operación con mayor dificultad a la hora de resolverlo. En tercer lugar, aparecen las divisiones que, al igual que en el caso del anterior grupo, los ítems $100:2$ y $102:2$ presentan altas puntuaciones y $500:50$ es la operación que presenta mayor dificultad. En este caso coinciden ambos cursos en las operaciones que requieren menor trabajo cognitivo y en aquellas que presentan alta dificultad de resolución. Por último, las operaciones de sustracción son las más complicadas para nuestra muestra, dentro de estas $100 - 25$ resulta ser la que mayor puntuación ha obtenido y $10000 - 101$ la que menos, compartiendo resultados con cuarto curso.

Ambos grupos encuentra baja dificultad en la resolución de la prueba escrita debido a la seguridad que este tipo de ejecución les da al poder resolverlas de forma tradicional poniendo los algoritmos en un papel de forma vertical y haciendo un uso escaso del gran repertorio de estrategias que existen para realizar los cálculos de forma ágil. Como se puede comprobar estos alumnos tienen muy arraigados a ellos el rol tradicional para la resolución de los algoritmos por lo que deberían de seguir desarrollando el uso de estrategias y su posterior generalización a otras situaciones semejantes que lo requieran.

Respecto a la tarea de estimación ambos grupos (cuarto y quinto de Educación Primaria) presentan resultados similares. Estos alumnos presentan mayor complejidad a la hora de estimar cantidades pequeñas, aquellas que van desde el inicio (0) hasta la mitad de la línea numérica (500) y mayor facilidad para estimar aquellos dígitos que se encuentran en el resto de la línea (de 500 a 1000) como bien se puede apreciar en la Tabla 5. En este caso, los resultados del grupo de quinto curso, son más precisos que los alumnos de cuarto.

Si relacionamos las pruebas realizadas para ver la correlación existente entre ellas (puntuación total obtenida en cálculo escrito, puntuación total obtenida en cálculo mental, puntuación total obtenida en la prueba de cálculo escrito pero realizado mentalmente y la media del error en estimación en la línea numérica) podemos ver como existe una correlación significativa positiva entre cálculo escrito y mental, siendo mayor la relación con el cálculo mental. En el grupo de cuarto percibimos que la correlación es significativa entre cálculo mental y escrito pero con puntuaciones más bajas que el curso anterior, aumentando la puntuación en la correlación existente entre cálculo mental y escrito realizado mentalmente. Al igual que ocurre con el grupo de cuarto curso, apreciamos una correlación negativa, como era de esperar, mayor entre cálculo mental y los errores en estimación.

Para finalizar, tanto los alumnos de cuarto como los de quinto de Educación Primaria, tras analizar su distribución en estimación, encontramos que ambos grupos presentan una función lineal debido a que cuanto más mayores van siendo, mayor es su función cognitiva, más experiencias viven con su alrededor y mayor es su precisión en estimación, de ahí que presenten una función de este tipo y no logarítmica, que sería

más común en grupos inferiores como primero y segundo de primaria (Opfer y Siegler, 2007).

Los resultados obtenidos sugieren la idea de seguir estudiando diferentes aspectos en el futuro sobre distintos matices que pueden ser aplicados a estos resultados, como el desarrollo de estrategias específicas que ayuden a mejorar el desarrollo cognitivo. Otra sugerencia que plantean los resultados a tener en cuenta sería que la evaluación de la estimación se midiera a través de los aciertos obtenidos por los alumnos en la prueba en lugar de los errores.

En el presente estudio encontramos ciertas limitaciones a tener en cuenta que pueden ser consideradas en futuros trabajos como la realización de comparaciones entre diferentes grupos, ampliación de la muestra o la aplicación a otros ámbitos.

Referencias bibliográficas:

- Beishuizen, M. (1997). Mental arithmetic: mental recall or mental strategies?, *Mathematics Teaching*, (160), 16-19.
- Booth, J. L.; Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental psychology*, 41(6), 189-201.
- Booth, J. L.; Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child development*, 79(4), 1016-1031.
- Campbell, J. I. D. (2005). *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Fernández Bravo, J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática*, (4), 31-46.
- Gálvez, G.; Cosmelli, D.; Cubillos, L.; Leger, P.; Mena, A.; Tanter, E.; Flores, X.; Luci, G.; Montoya, S.; Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 9-40.
- Gómez Alfonso, B. (1995). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Granada: Ed. Comares.
- Gómez Alfonso, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 4, 17-29.
- Godino, J. D.; Fonto, V.; Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista latinoamericana de Investigación de Matemática Educativa*, nº especial, 131-155.
- Hartnett, J. E. (2007). Categorisation of mental computation strategies support teaching and encourage classroom dialogue. In J. Watson and K. Beswick, *Mathematics:*

- Essential research, essential practice. *Proceeding of the 30th annual conference for mathematics education research group of Australasia, 1*, 345-352.
- Heirdsfield, A. (2005). One teacher's role in promoting understanding in mental computation. In H. I. Chick; J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education, 3*, 113-120.
- Ineson, E. (2007). Year 6 children: has the new British mathematics curriculum helped their mental computation? *Early child development and care, 177*(5), 541-555.
- Ineson, E. (2008). The mental mathematics of trainee teachers in the UK: Patterns and preferences. *The mathematics educator, 11*(1/2), 127-142.
- Jacuvobich, S. (2006). Modelos actuales de procesamiento del número y el cálculo. *Revista argentina de neuropsicología, (7)*, 21-31.
- Leger, P.; Gálvez, G.; Cubillos, L.; Cosmelli, D.; Inostroza, M.; Luci, G.; Tanter, E.; Soto-Andrade, J. (2011). ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: un diseño y estudio de casos. *Technical Report TR/DCC-2011-11*, University of Chile.
- Martínez Montero, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón, 63*(4), 95-110.
- Ministerio de Educación y Cultura (2007). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de Julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria. BOE, 173 de 27 de Julio de 2007.
- Opfer, J. E.; Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitiv psychology, 55*, 169-195.
- Rodríguez, E. M. (2010). El papel de la escuela y el docente en el contexto de los cambios devenidos de la praxis del binomio matemáticas-continuidad. *Revista iberoamericana de educación matemática, 1*, 113-125.
- Siegler, R. S.; Booth, J. L. (2004). Developmennt of numerical estimation in young children. *Child development, 75*(2), 428-444.

- Siegler, R. S.; Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological science*, 14, 237-243.
- Tabor, P. D. (2008). *An investigation of instruction in two-digit addition and subtraction using a classroom teaching experiment methodology, design research and multilevel modeling*. Southern Cross University, New South Wales.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational studies in mathematics*, 50(1), 29-47.
- Torbeyns, J.; De Smedt, B.; Ghesquiere, P.; Verschaffel, L. (2009). Solving subtractions adaptively by means of indirect addition: influence of task, subject and instrumental factors. *Mediterranean journal for research in mathematics education*, 8(2), 1-30.
- Torbeyns, J.; De Smedt, B.; Stassens, N.; Ghesquiere, P.; Verschaffel, L. (2009). Solving problems by means of indirect addition. *Mathematical thinking and learning*, 11, 79-91.